2024年北京高考数学真题

一、单选题

1. 已知集合 $M=\{x\mid -4<x\le 1\}$，$N=\{x\mid -1<x<3\}$，则 $M\cup N=$（　　）

A．$\{x\mid -4<x<3\}$　　B．$\{x\mid -1<x\le 1\}$

C．$\{0,1,2\}$　　D．$\{x\mid -1<x<4\}$

2. 已知 $\frac{z}{\mathrm{i}}=\mathrm{i}-1$，则 $z=$（　　）.

A．$1-\mathrm{i}$　　B．$-\mathrm{i}$　　C．$-1-\mathrm{i}$　　D．1

3. 求圆 $x^2+y^2-2x+6y=0$ 的圆心到 $x-y+2=0$ 的距离（　　）

A．$2\sqrt{3}$　　B．2　　C．$3\sqrt{2}$　　D．$\sqrt{6}$

4. $\left(x-\sqrt{x}\right)^4$ 的二项展开式中 x^3 的系数为（　　）

A．15　　B．6　　C．-4　　D．-13

5. 已知向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，则“$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=0$”是“$\vec{a}=\vec{b}$ 或 $\vec{a}=-\vec{b}$”的（　　）条件.

A．必要而不充分条件　　B．充分而不必要条件

C．充分且必要条件　　D．既不充分也不必要条件

6. 已知 $f(x)=\sin\omega x(\omega>0)$，$f(x_1)=-1$，$f(x_2)=1$，$|x_1-x_2|_{\min}=\frac{\pi}{2}$，则 $\omega=$（　　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

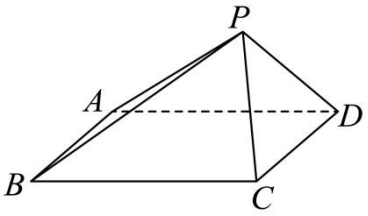
7. 生物丰富度指数 $d=\frac{S-1}{\ln N}$ 是河流水质的一个评价指标，其中 S,N 分别表示河流中的生物种类数与生物个体总数.生物丰富度指数 d 越大，水质越好．如果某河流治理前后的生物种类数S没有变化，生物个体总数由 N_1 变为 N_2，生物丰富度指数由2.1提高到 3.15，则（　　）

A．$3N_2=2N_1$　　B．$2N_2=3N_1$

C．$N_2^2=N_1^3$　　D．$N_2^3=N_1^2$

GK真题帮
真题如宝，高考无忧!
Real Questions, True success!

8. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 4 的正方形，$PA=PB=4$，$PC=PD=2\sqrt{2}$，该棱锥的高为（　　）.



A. 1　　B. 2　　C. $\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{3}$

9. 已知 (x_1,y_1)，(x_2,y_2) 是函数 $y=2^x$ 图象上不同的两点，则下列正确的是（　　）

A. $\log_2\frac{y_1+y_2}{2}>\frac{x_1+x_2}{2}$　　B. $\log_2\frac{y_1+y_2}{2}<\frac{x_1+x_2}{2}$

C. $\log_2\frac{y_1+y_2}{2}>x_1+x_2$　　D. $\log_2\frac{y_1+y_2}{2}<x_1+x_2$

10. 已知 $M=\left\{(x,y)\,|\,y=x+t\left(x^2-x\right),1\le x\le 2,0\le t\le 1\right\}$ 是平面直角坐标系中的点集.设 d 是 M 中两点间距离的最大值，S 是 M 表示的图形的面积，则（　　）

A. $d=3$，$S<1$　　B. $d=3$，$S>1$

C. $d=\sqrt{10}$，$S<1$　　D. $d=\sqrt{10}$，$S>1$

二、填空题

11. 已知抛物线 $y^2=16x$，则焦点坐标为_____.

12. 已知 $\alpha\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$，且α与β的终边关于原点对称，则 $\cos\beta$ 的最大值为_____.

13. 若直线 $y=k(x-3)$ 与双曲线 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 只有一个公共点，则 k 的一个取值为_____..

14. 汉代刘歆设计的“铜嘉量”是龠、合、升、斗、斛五量合一的标准量器，其中升量器、斗量器、斛量器的形状均可视为圆柱.若升、斗、斛量器的容积成公比为 10 的等比数列，

GK真题帮
真题如宝，高考无忧!
Real Questions, True success!

底面直径依次为 $65\text{mm},325\text{mm},325\text{mm}$，且斛量器的高为 230mm，则斗量器的高为_____ mm，升量器的高为_____ mm .

15. 设 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 是两个不同的无穷数列，且都不是常数列.记集合 $M=\left\{k\mid a_k=b_k,k\in \mathrm{N}^*\right\}$，给出下列 4 个结论：

①若 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 均为等差数列，则 M 中最多有 1 个元素；

②若 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 均为等比数列，则 M 中最多有 2 个元素；

③若 $\{a_n\}$ 为等差数列，$\{b_n\}$ 为等比数列，则 M 中最多有 3 个元素；

④若 $\{a_n\}$ 为递增数列，$\{b_n\}$ 为递减数列，则 M 中最多有 1 个元素.

其中正确结论的序号是_____.

三、解答题

16. 在△ABC 中，$a=7$，A 为钝角，$\sin 2B=\frac{\sqrt{3}}{7}b\cos B$.

（1）求 $\angle A$；

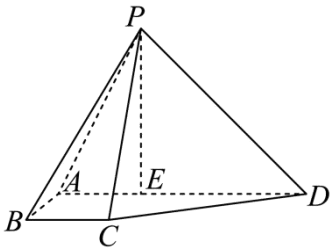
（2）从条件①、条件②和条件③这三个条件中选择一个作为已知，求△ABC 的面积.

①$b=7$；②$\cos B=\frac{13}{14}$；③$c\sin A=\frac{5}{2}\sqrt{3}$.

注：如果选择条件①、条件②和条件③分别解答，按第一个解答计分.

GK真题帮
真题如宝，高考无忧!
Real Questions, True success!

17. 已知四棱锥 $P\text{-}ABCD$ ， $AD//BC$ ， $AB=BC=1$ ， $AD=3$ ， $DE=PE=2$ ， E 是 AD 上一点， $PE\perp AD$.



（1）若 F 是 PE 中点，证明： $BF//$ 平面 PCD .

（2）若 $AB\perp$ 平面 PED ，求平面 PAB 与平面 PCD 夹角的余弦值.

18. 某保险公司为了了解该公司某种保险产品的索赔情况，从合同险期限届满的保单中随机抽取 1000 份，记录并整理这些保单的索赔情况，获得数据如下表：

赔偿次数	0	1	2	3	4
单数	800	100	60	30	10

假设：一份保单的保费为 0.4 万元；前 3 次索赔时，保险公司每次赔偿 0.8 万元；第四次索赔时，保险公司赔偿 0.6 万元.假设不同保单的索赔次数相互独立.用频率估计概率.

（1）估计一份保单索赔次数不少于 2 的概率；

（2）一份保单的毛利润定义为这份保单的保费与赔偿总金额之差.

（i）记 X 为一份保单的毛利润，估计 X 的数学期望 $E\left(X\right)$；

GK真题帮
真题如宝，高考无忧!
Real Questions, True success!

（ii）如果无索赔的保单的保费减少4%，有索赔的保单的保费增加20%，试比较这种情况下一份保单毛利润的数学期望估计值与（i）中$E(X)$估计值的大小.（结论不要求证明）

19. 已知椭圆E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，以椭圆$E$的焦点和短轴端点为顶点的四边形是边长为2的正方形.过点$(0,t)(t>\sqrt{2})$且斜率存在的直线与椭圆E交于不同的两点A,B，过点A和$C(0,1)$的直线AC与椭圆E的另一个交点为D.

（1）求椭圆E的方程及离心率；

（2）若直线BD的斜率为0，求t的值..

20. 设函数$f(x)=x+k\ln(1+x)(k\neq 0)$，直线$l$是曲线$y=f(x)$在点$(t,f(t))(t>0)$处的切线.

GK真题帮
真题如宝，高考无忧!
Real Questions, True success!

（1）当$k=-1$时，求$f(x)$的单调区间.

（2）求证：l不经过点$(0,0)$.

（3）当$k=1$时，设点$A(t,f(t))(t>0)$，$C(0,f(t))$，$O(0,0)$，B为l与y轴的交点，$S_{\triangle ACO}$与$S_{\triangle ABO}$分别表示$\triangle ACO$与$\triangle ABO$的面积．是否存在点A使得$2S_{\triangle ACO}=15S_{\triangle ABO}$成立？若存在，这样的点A有几个？

（参考数据：$1.09<\ln 3<1.10$，$1.60<\ln 5<1.61$，$1.94<\ln 7<1.95$）

21. 已知集合

$M=\{(i,j,k,w)\,|\,i\in\{1,2\},j\in\{3,4\},k\in\{5,6\},w\in\{7,8\},\text{且}i+j+k+w\text{为偶数}\}$.

给定数列$A:a_1,a_2,\cdots,a_8$，和序列$\Omega:T_1,T_2,\cdots T_s$，其中

$T_t=(i_t,j_t,k_t,w_t)\in M\,(t=1,2,\cdots,s)$，对数列A进行如下变换：将A的第$i_1,j_1,k_1,w_1$项均加1，其余项不变，得到的数列记作$T_1(A)$；将$T_1(A)$的第$i_2,j_2,k_2,w_2$项均加1，其余项不变，得到数列记作$T_2T_1(A)$；……；以此类推，得到$T_s\cdots T_2T_1(A)$，简记为$\Omega(A)$.

（1）给定数列$A:1,3,2,4,6,3,1,9$和序列$\Omega:(1,3,5,7),(2,4,6,8),(1,3,5,7)$，写出$\Omega(A)$；

（2）是否存在序列Ω，使得$\Omega(A)$为

$a_1+2,a_2+6,a_3+4,a_4+2,a_5+8,a_6+2,a_7+4,a_8+4$，若存在，写出一个符合条件的$\Omega$；若不存在，请说明理由；

GK真题帮
真题如宝，高考无忧!
Real Questions, True success!

（3）若数列 A 的各项均为正整数，且 $a_1+a_3+a_5+a_7$ 为偶数，求证：“存在序列 Ω，使得 $\Omega(A)$ 的各项都相等”的充要条件为“$a_1+a_2=a_3+a_4=a_5+a_6=a_7+a_8$”.

参考答案：

1．A

【分析】直接根据并集含义即可得到答案.

【详解】由题意得 $M\cup N=(-4,3)$，

故选：A.

2．C

【分析】直接根据复数乘法即可得到答案.

【详解】由题意得 $z=\mathrm{i}(\mathrm{i}-1)=-1-\mathrm{i}$，

故选：C.

3．C

【分析】求出圆心坐标，再利用点到直线距离公式即可.

【详解】由题意得 $x^2+y^2-2x+6y=0$，即 $(x-1)^2+(y+3)^2=10$，

则其圆心坐标为 $(1,-3)$，则圆心到直线 $x-y+2=0$ 的距离为 $\dfrac{|1+3+2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=3\sqrt{2}$，

故选：C.

4．B

GK真题帮
真题如宝，高考无忧!
Real Questions, True success!

【分析】写出二项展开式，令$4-\frac{r}{2}=3$，解出r然后回代入二项展开式系数即可得解.

【详解】$\left(x-\sqrt{x}\right)^4$的二项展开式为$T_{r+1}=C_4^r x^{4-r}\left(-\sqrt{x}\right)^r=C_4^r\left(-1\right)^r x^{4-\frac{r}{2}},\left(r=0,1,2,3,4\right)$，

令$4-\frac{r}{2}=3$，解得$r=2$，

故所求即为$C_4^2\left(-1\right)^2=6$.

故选：B.

5．A

【分析】根据向量数量积分析可知$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=0$等价于$\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|$，结合充分、必要条件分析判断.

【详解】因为$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\vec{a}^2-\vec{b}^2=0$，可得$\vec{a}^2=\vec{b}^2$，即$\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|$，

可知$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=0$等价于$\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|$，

若$\vec{a}=\vec{b}$或$\vec{a}=-\vec{b}$，可得$\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|$，即$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=0$，可知必要性成立；

若$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=0$，即$\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|$，无法得出$\vec{a}=\vec{b}$或$\vec{a}=-\vec{b}$，

例如$\vec{a}=\left(1,0\right),\vec{b}=\left(0,1\right)$，满足$\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|$，但$\vec{a}\neq\vec{b}$且$\vec{a}\neq-\vec{b}$，可知充分性不成立；

综上所述，“$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=0$”是“$\vec{a}\neq\vec{b}$且$\vec{a}\neq-\vec{b}$”的必要不充分条件.

故选：A.

6．B

【分析】根据三角函数最值分析周期性，结合三角函数最小正周期公式运算求解.

【详解】由题意可知：x_1为$f\left(x\right)$的最小值点，x_2为$f\left(x\right)$的最大值点，

则$\left|x_1-x_2\right|_{\min}=\frac{T}{2}=\frac{\pi}{2}$，即$T=\pi$，

且$\omega>0$，所以$\omega=\frac{2\pi}{T}=2$.

故选：B.

7．D

【分析】根据题意分析可得$\frac{S-1}{\ln N_1}=2.1,\frac{S-1}{\ln N_2}=3.15$，消去S即可求解.

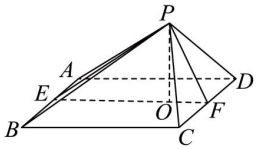
GK真题帮
真题如宝，高考无忧！
Real Questions, True success!

【详解】由题意得 $\frac{S-1}{\ln N_1}=2.1,\frac{S-1}{\ln N_2}=3.15$，则 $2.1\ln N_1=3.15\ln N_2$，即 $2\ln N_1=3\ln N_2$，

所以 $N_2^3=N_1^2$. 故选：D.

8．D

【分析】取点作辅助线，根据题意分析可知平面 $PEF\perp$ 平面 $ABCD$，可知 $PO\perp$ 平面 $ABCD$，利用等体积法求点到面的距离.



【详解】如图，底面 $ABCD$ 为正方形，

当相邻的棱长相等时，不妨设 $PA=PB=AB=4,PC=PD=2\sqrt{2}$，

分别取 AB,CD 的中点 E,F，连接 PE,PF,EF，

则 $PE\perp AB,EF\perp AB$，且 $PE\cap EF=E$，$PE,EF\subset$ 平面 PEF，

可知 $AB\perp$ 平面 PEF，且 $AB\subset$ 平面 $ABCD$，

所以平面 $PEF\perp$ 平面 $ABCD$，

过 P 作 EF 的垂线，垂足为 O，即 $PO\perp EF$，

由平面 $PEF\cap$ 平面 $ABCD=EF$，$PO\subset$ 平面 PEF，

所以 $PO\perp$ 平面 $ABCD$，

由题意可得：$PE=2\sqrt{3},PF=2,EF=4$，则 $PE^2+PF^2=EF^2$，即 $PE\perp PF$，

则 $\frac{1}{2}PE\cdot PF=\frac{1}{2}PO\cdot EF$，可得 $PO=\frac{PE\cdot PF}{EF}=\sqrt{3}$，

所以四棱锥的高为 $\sqrt{3}$.

当相对的棱长相等时，不妨设 $PA=PC=4$，$PB=PD=2\sqrt{2}$，

因为 $BD=4\sqrt{2}=PB+PD$，此时不能形成三角形 PBD，与题意不符，这样情况不存在.

故选：D.

9．A

【分析】根据指数函数和对数函数的单调性结合基本不等式分析判断 AB；举例判断 CD 即可.

【详解】由题意不妨设 $x_1<x_2$，因为函数 $y=2^x$ 是增函数，所以 $0<2^{x_1}<2^{x_2}$，即 $0<y_1<y_2$，

对于选项 AB：可得 $\frac{2^{x_1}+2^{x_2}}{2}>\sqrt{2^{x_1}\cdot 2^{x_2}}=2^{\frac{x_1+x_2}{2}}$，即 $\frac{y_1+y_2}{2}>2^{\frac{x_1+x_2}{2}}>0$，

GK真题帮
真题如宝，高考无忧!
Real Questions, True success!

根据函数 $y=\log_2 x$ 是增函数，所以 $\log_2\frac{y_1+y_2}{2}>\log_2 2^{\frac{x_1+x_2}{2}}=\frac{x_1+x_2}{2}$，故 A 正确，B 错误；

对于选项 C：例如 $x_1=0,x_2=1$，则 $y_1=1,y_2=2$，

可得 $\log_2\frac{y_1+y_2}{2}=\log_2\frac{3}{2}\in(0,1)$，即 $\log_2\frac{y_1+y_2}{2}<1=x_1+x_2$，故 C 错误；

对于选项 D：例如 $x_1=-1,x_2=-2$，则 $y_1=\frac{1}{2},y_2=\frac{1}{4}$，

可得 $\log_2\frac{y_1+y_2}{2}=\log_2\frac{3}{8}=\log_2 3-3\in(-2,-1)$，即 $\log_2\frac{y_1+y_2}{2}>-3=x_1+x_2$，故 D 错误，

故选：A.

10．C

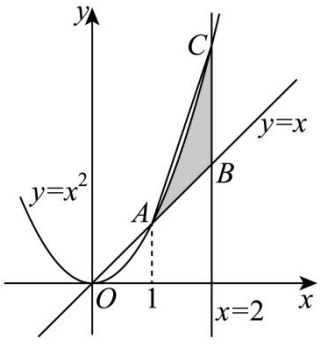
【分析】先以 t 为变量，分析可知所求集合表示的图形即为平面区域 $\begin{cases}y\le x^2\\ y\ge x\\ 1\le x\le 2\end{cases}$，结合图形分析求解即可.

【详解】对任意给定 $x\in[1,2]$，则 $x^2-x=x(x-1)\ge 0$，且 $t\in[0,1]$，

可知 $x\le x+t(x^2-x)\le x+x^2-x=x^2$，即 $x\le y\le x^2$，

再结合 x 的任意性，所以所求集合表示的图形即为平面区域 $\begin{cases}y\le x^2\\ y\ge x\\ 1\le x\le 2\end{cases}$，

如图阴影部分所示，其中 $A(1,1),B(2,2),C(2,4)$，



可知任意两点间距离最大值 $d=|AC|=\sqrt{10}$；

阴影部分面积 $S<S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 1\times 2=1$.

故选：C.

11．$(4,0)$

GK真题帮
真题如宝，高考无忧!
Real Questions, True success!

【分析】形如$y^2=2px,(p\neq 0)$的抛物线的焦点坐标为$\left(\frac{p}{2},0\right)$，由此即可得解.

【详解】由题意抛物线的标准方程为$y^2=16x$，所以其焦点坐标为$(4,0)$.

故答案为：$(4,0)$.

12．$-\frac{1}{2}/-0.5$

【分析】首先得出$\beta=\alpha+\pi+2k\pi,k\in Z$，结合三角函数单调性即可求解最值.

【详解】由题意$\beta=\alpha+\pi+2k\pi,k\in Z$，从而$\cos\beta=\cos(\alpha+\pi+2k\pi)=-\cos\alpha$，

因为$\alpha\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$，所以$\cos\alpha$的取值范围是$\left[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$，$\cos\beta$的取值范围是$\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right]$，

当且仅当$\alpha=\frac{\pi}{3}$，即$\beta=\frac{4\pi}{3}+2k\pi,k\in Z$时，$\cos\beta$取得最大值，且最大值为$-\frac{1}{2}$.

故答案为：$-\frac{1}{2}$.

13．$\frac{1}{2}$（或$-\frac{1}{2}$，答案不唯一）

【分析】联立直线方程与双曲线方程，根据交点个数与方程根的情况列式即可求解.

【详解】联立$\begin{cases}\frac{x^2}{4}-y^2=1\\ y=k(x-3)\end{cases}$，化简并整理得：$(1-4k^2)x^2+24k^2x-36k^2-4=0$，

由题意得$1-4k^2=0$或$\Delta=(24k^2)^2+4(36k^2+4)(1-4k^2)=0$，

解得$k=\pm\frac{1}{2}$或无解，即$k=\pm\frac{1}{2}$，经检验，符合题意.

故答案为：$\frac{1}{2}$（或$-\frac{1}{2}$，答案不唯一）.

14．　①. 23　　②. 57.5##$\frac{115}{2}$

【分析】根据体积为公比为10的等比数列可得关于高度的方程组，求出其解后可得前两个圆柱的高度.

【详解】设升量器的高为h_1，斗量器的高为h_2（单位都是mm），则

$$\frac{\pi\left(\frac{325}{2}\right)^2h_2}{\pi\left(\frac{65}{2}\right)^2h_1}=\frac{\pi\left(\frac{325}{2}\right)^2\times 230}{\pi\left(\frac{325}{2}\right)^2h_2}=10,$$

GK真题帮
真题如宝，高考无忧!
Real Questions, True success!

故 $h_2=23\text{mm}$，$h_1=\dfrac{115}{2}\text{mm}$.

故答案为：$23\text{mm},\dfrac{115}{2}\text{mm}$.

15．①③④

【分析】利用两类数列的散点图的特征可判断①④的正误，利用反例可判断②的正误，结合通项公式的特征及反证法可判断③的正误.

【详解】对于①，因为 $\{a_n\},\{b_n\}$ 均为等差数列，故它们的散点图分布在直线上，

而两条直线至多有一个公共点，故 M 中至多一个元素，故①正确.

对于②，取 $a_n=2^{n-1},b_n=-(-2)^{n-1}$，则 $\{a_n\},\{b_n\}$ 均为等比数列，

但当 n 为偶数时，有 $a_n=2^{n-1}=b_n=-(-2)^{n-1}$，此时 M 中有无穷多个元素，故②错误.

对于③，设 $b_n=Aq^n\left(Aq\neq 0,q\neq\pm1\right)$，$a_n=kn+b\left(k\neq 0\right)$，

若 M 中至少四个元素，则关于 n 的方程 $Aq^n=kn+b$ 至少有 4 个不同的正数解，

若 $q>0,q\neq1$，则由 $y=Aq^n$ 和 $y=kn+b$ 的散点图可得关于 n 的方程 $Aq^n=kn+b$ 至多有两个不同的解，矛盾；

若 $q<0,q\neq\pm1$，考虑关于 n 的方程 $Aq^n=kn+b$ 奇数解的个数和偶数解的个数，

当 $Aq^n=kn+b$ 有偶数解，此方程即为 $A|q|^n=kn+b$，

方程至多有两个偶数解，且有两个偶数解时 $Ak\ln|q|>0$，

否则 $Ak\ln|q|<0$，因 $y=A|q|^n,y=kn+b$ 单调性相反，

方程 $A|q|^n=kn+b$ 至多一个偶数解，

当 $Aq^n=kn+b$ 有奇数解，此方程即为 $-A|q|^n=kn+b$，

方程至多有两个奇数解，且有两个奇数解时 $-Ak\ln|q|>0$ 即 $Ak\ln|q|<0$

否则 $Ak\ln|q|>0$，因 $y=-A|q|^n,y=kn+b$ 单调性相反，

方程 $A|q|^n=kn+b$ 至多一个奇数解，

因为 $Ak\ln|q|>0$，$Ak\ln|q|<0$ 不可能同时成立，

GK真题帮
真题如宝，高考无忧!
Real Questions, True success!

故 $Aq^n=kn+b$ 不可能有 4 个不同的整数解，即 M 中最多有 3 个元素，故③正确.

对于④，因为 $\{a_n\}$ 为递增数列，$\{b_n\}$ 为递减数列，前者散点图呈上升趋势，

后者的散点图呈下降趋势，两者至多一个交点，故④正确.

故答案为：①③④

16．(1) $A=\frac{2\pi}{3}$；

(2)选择①无解；选择②和③△ABC 面积均为 $\frac{15\sqrt{3}}{4}$.

【分析】（1）利用正弦定理即可求出答案；

（2）选择①，利用正弦定理得 $B=\frac{\pi}{3}$，结合（1）问答案即可排除；选择②，首先求出 $\sin B=\frac{3\sqrt{3}}{14}$，再代入式子得 $b=3$，再利用两角和的正弦公式即可求出 $\sin C$，最后利用三角形面积公式即可；选择③，首先得到 $c=5$，再利用正弦定理得到 $\sin C=\frac{5\sqrt{3}}{14}$，再利用两角和的正弦公式即可求出 $\sin B$，最后利用三角形面积公式即可；

【详解】（1）由题意得 $2\sin B\cos B=\frac{\sqrt{3}}{7}b\cos B$，因为A为钝角，

则 $\cos B\neq 0$，则 $2\sin B=\frac{\sqrt{3}}{7}b$，则 $\frac{b}{\sin B}=\frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{7}}=\frac{a}{\sin A}=\frac{7}{\sin A}$，解得 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

因为A为钝角，则 $A=\frac{2\pi}{3}$.

（2）选择① $b=7$，则 $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{14}b=\frac{\sqrt{3}}{14}\times 7=\frac{\sqrt{3}}{2}$，因为 $A=\frac{2\pi}{3}$，则 B 为锐角，则 $B=\frac{\pi}{3}$，

此时 $A+B=\pi$，不合题意，舍弃；

选择② $\cos B=\frac{13}{14}$，因为 B 为三角形内角，则 $\sin B=\sqrt{1-\left(\frac{13}{14}\right)^2}=\frac{3\sqrt{3}}{14}$，

则代入 $2\sin B=\frac{\sqrt{3}}{7}b$ 得 $2\times\frac{3\sqrt{3}}{14}=\frac{\sqrt{3}}{7}b$，解得 $b=3$，

$\sin C=\sin(A+B)=\sin\left(\frac{2\pi}{3}+B\right)=\sin\frac{2\pi}{3}\cos B+\cos\frac{2\pi}{3}\sin B$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{13}{14}+\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{3\sqrt{3}}{14}=\frac{5\sqrt{3}}{14}$，

则 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times 7\times 3\times\frac{5\sqrt{3}}{14}=\frac{15\sqrt{3}}{4}$.

GK真题帮
真题如宝，高考无忧!
Real Questions, True success!

选择③$c\sin A=\frac{5}{2}\sqrt{3}$，则有$c\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{5}{2}\sqrt{3}$，解得$c=5$，

则由正弦定理得$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，即$\frac{7}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{5}{\sin C}$，解得$\sin C=\frac{5\sqrt{3}}{14}$，

因为C为三角形内角，则$\cos C=\sqrt{1-\left(\frac{5\sqrt{3}}{14}\right)^2}=\frac{11}{14}$，

则$\sin B=\sin(A+C)=\sin\left(\frac{2\pi}{3}+C\right)=\sin\frac{2\pi}{3}\cos C+\cos\frac{2\pi}{3}\sin C$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{11}{14}+\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{5\sqrt{3}}{14}=\frac{3\sqrt{3}}{14}$，

则$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times7\times5\times\frac{3\sqrt{3}}{14}=\frac{15\sqrt{3}}{4}$

17．(1)证明见解析

(2)$\frac{\sqrt{30}}{30}$

【分析】（1）取PD的中点为S，接SF,SC，可证四边形$SFBC$为平行四边形，由线面平行的判定定理可得$BF//$平面PCD.

（2）建立如图所示的空间直角坐标系，求出平面APB和平面PCD的法向量后可求夹角的余弦值.

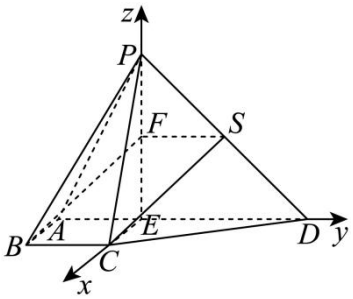
【详解】（1）取PD的中点为S，接SF,SC，则$SF//ED,SF=\frac{1}{2}ED=1$，

而$ED//BC,ED=2BC$，故$SF//BC,SF=BC$，故四边形$SFBC$为平行四边形，

故$BF//SC$，而$BF\not\subset$平面PCD，$SC\subset$平面PCD，

所以$BF//$平面PCD.

（2）



因为$ED=2$，故$AE=1$，故$AE//BC,AE=BC$，

故四边形$AECB$为平行四边形，故$CE//AB$，所以$CE\perp$平面PAD，

GK真题帮
真题如宝，高考无忧!
Real Questions, True success!

而 $PE,ED\subset$ 平面 PAD，故 $CE\perp PE,CE\perp ED$，而 $PE\perp ED$，

故建立如图所示的空间直角坐标系，

则 $A(0,-1,0),B(1,-1,0),C(1,0,0),D(0,2,0),P(0,0,2)$，

则 $\overrightarrow{PA}=(0,-1,-2),\overrightarrow{PB}=(1,-1,-2),\overrightarrow{PC}=(1,0,-2),\overrightarrow{PD}=(0,2,-2)$

设平面 PAB 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，

则由 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{PA}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{PB}=0\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}-y-2z=0\\ x-y-2z=0\end{cases}$，取 $\vec{m}=(0,-2,1)$，

设平面 PCD 的法向量为 $\vec{n}=(a,b,c)$，

则由 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{PC}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{PD}=0\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}a-2b=0\\ 2b-2c=0\end{cases}$，取 $\vec{n}=(2,1,1)$，

故 $\cos\vec{m},\vec{n}=\dfrac{-1}{\sqrt{5}\times\sqrt{6}}=-\dfrac{\sqrt{30}}{30}$，

故平面 PAB 与平面 PCD 夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{30}}{30}$

18．（1）$\dfrac{1}{10}$

（2）(i)0.122 万元；(ii) 这种情况下一份保单毛利润的数学期望估计值大于（i）中 $E(X)$ 估计值

【分析】（1）根据题设中的数据可求赔偿次数不少 2 的概率;

（2）（i）设 ξ 为赔付金额，则 ξ 可取 $0,0.8,0.1.6,2.4,3$，用频率估计概率后可求 ξ 的分布列及数学期望，从而可求 $E(X)$.

（ii）先算出下一期保费的变化情况，结合（1）的结果可求 $E(Y)$，从而即可比较大小得解.

【小问 1 详解】

设 A 为“随机抽取一单，赔偿不少于 2 次”，

由题设中的统计数据可得 $P(A)=\dfrac{60+30+10}{800+100+60+30+10}=\dfrac{1}{10}$.

【小问 2 详解】

（i）设 ξ 为赔付金额，则 ξ 可取 $0,0.8,1.6,2.4,3$，

GK真题帮
真题如宝，高考无忧!
Real Questions, True success!

由题设中的统计数据可得 $P(\xi=0)=\frac{800}{1000}=\frac{4}{5}, P(\xi=0.8)=\frac{100}{1000}=\frac{1}{10}$，

$P(\xi=1.6)=\frac{60}{1000}=\frac{3}{50}$， $P(\xi=2.4)=\frac{30}{1000}=\frac{3}{100}$，

$P(\xi=3)=\frac{10}{1000}=\frac{1}{100}$，

故 $E(\xi)=0\times\frac{4}{5}+0.8\times\frac{1}{10}+1.6\times\frac{3}{50}+2.4\times\frac{3}{100}+3\times\frac{1}{100}=0.278$

故 $E(X)=0.4-0.278=0.122$（万元）.

（ii）由题设保费的变化为 $0.4\times\frac{4}{5}\times96\%+0.4\times\frac{1}{5}\times1.2=0.4032$，

故 $E(Y)=0.122+0.4032-0.4=0.1252$（万元），

从而 $E(X)<E(Y)$.

19.（1）$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1, e=\frac{\sqrt{2}}{2}$

（2）$t=2$

【分析】（1）由题意得 $b=c=\sqrt{2}$，进一步得 a，由此即可得解；

（2）设 $AB: y=kx+t, \left(k\neq0, t>\sqrt{2}\right)$， $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$，联立椭圆方程，由韦达定

理有 $x_1+x_2=\frac{-4kt}{1+2k^2}, x_1x_2=\frac{2t^2-4}{2k^2+1}$，而 $AD: y=\frac{y_1-y_2}{x_1+x_2}(x-x_1)+y_1$，令 $x=0$，即可得

解.

【小问 1 详解】

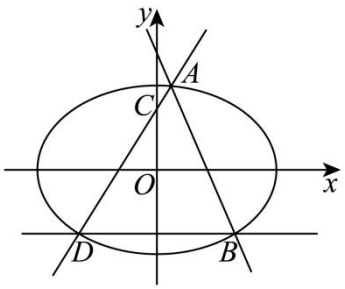
由题意 $b=c=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，从而 $a=\sqrt{b^2+c^2}=2$，

所以椭圆方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$，离心率为 $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$；

【小问 2 详解】

直线 AB 斜率不为 0，否则直线 AB 与椭圆无交点，矛盾，

GK真题帮
真题如宝，高考无忧!
Real Questions, True success!



从而设 $AB:y=kx+t,\left(k\neq 0,t>\sqrt{2}\right)$， $A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$，

联立 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1\\ y=kx+t\end{cases}$，化简并整理得 $\left(1+2k^2\right)x^2+4ktx+2t^2-4=0$，

由题意 $\Delta=16k^2t^2-8\left(2k^2+1\right)\left(t^2-2\right)=8\left(4k^2+2-t^2\right)>0$，即 k,t 应满足

$4k^2+2-t^2>0$，

所以 $x_1+x_2=\dfrac{-4kt}{1+2k^2},x_1x_2=\dfrac{2t^2-4}{2k^2+1}$，

若直线 BD 斜率为 0，由椭圆的对称性可设 $D\left(-x_2,y_2\right)$，

所以 $AD:y=\dfrac{y_1-y_2}{x_1+x_2}\left(x-x_1\right)+y_1$，在直线 AD 方程中令 $x=0$，

得

$$y_C=\frac{x_1y_2+x_2y_1}{x_1+x_2}=\frac{x_1\left(kx_2+t\right)+x_2\left(kx_1+t\right)}{x_1+x_2}=\frac{2kx_1x_2+t\left(x_1+x_2\right)}{x_1+x_2}=\frac{4k\left(t^2-2\right)}{-4kt}+t=\frac{2}{t}=1$$

，

所以 $t=2$，

此时 k 应满足 $\begin{cases}4k^2+2-t^2=4k^2-2>0\\ k\neq 0\end{cases}$，即 k 应满足 $k<-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $k>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

综上所述，$t=2$ 满足题意，此时 $k<-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $k>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

20.（1）单调递减区间为 $(-1,0)$，单调递增区间为 $(0,+\infty)$.

（2）证明见解析　　（3）2

GK真题帮
真题如宝，高考无忧!
Real Questions, True success!

【分析】（1）直接代入 $k=-1$，再利用导数研究其单调性即可；

（2）写出切线方程 $y-f(t)=\left(1+\frac{k}{1+t}\right)(x-t)(t>0)$，将 $(0,0)$ 代入再设新函数 $F(t)=\ln(1+t)-\frac{t}{1+t}$，利用导数研究其零点即可；

（3）分别写出面积表达式，代入 $2S_{\triangle ACO}=15S_{ABO}$ 得到 $13\ln(1+t)-2t-15\frac{t}{1+t}=0$，再设新函数 $h(t)=13\ln(1+t)-2t-\frac{15t}{1+t}(t>0)$ 研究其零点即可.

【小问 1 详解】

$f(x)=x-\ln(1+x), f'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}(x>-1)$，

当 $x\in(-1,0)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(0,+\infty)$，$f'(x)>0$；

$\therefore f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

则 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-1,0)$，单调递增区间为 $(0,+\infty)$.

【小问 2 详解】

$f'(x)=1+\frac{k}{1+x}$，切线 l 的斜率为 $1+\frac{k}{1+t}$，

则切线方程为 $y-f(t)=\left(1+\frac{k}{1+t}\right)(x-t)(t>0)$，

将 $(0,0)$ 代入则 $-f(t)=-t\left(1+\frac{k}{1+t}\right), f(t)=t\left(1+\frac{k}{1+t}\right)$，

即 $t+k\ln(1+t)=t+t\frac{k}{1+t}$，则 $\ln(1+t)=\frac{t}{1+t}$，$\ln(1+t)-\frac{t}{1+t}=0$，

令 $F(t)=\ln(1+t)-\frac{t}{1+t}$，

假设 l 过 $(0,0)$，则 $F(t)$ 在 $t\in(0,+\infty)$ 存在零点.

$F'(t)=\frac{1}{1+t}-\frac{1+t-t}{(1+t)^2}=\frac{t}{(1+t)^2}>0$，$\therefore F(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$F(t)>F(0)=0$，

$\therefore F(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 无零点，$\therefore$ 与假设矛盾，故直线 l 不过 $(0,0)$.

【小问 3 详解】

$k=1$ 时，$f(x)=x+\ln(1+x), f'(x)=1+\frac{1}{1+x}=\frac{x+2}{1+x}>0$.

GK真题帮
真题如宝，高考无忧!
Real Questions, True success!

$S_{\triangle ACO}=\frac{1}{2}tf(t)$，设 l 与 y 轴交点 B 为 $(0,q)$，

$t>0$ 时，若 $q<0$，则此时 l 与 $f(x)$ 必有交点，与切线定义矛盾.

由（2）知 $q\neq 0$.所以 $q>0$，

则切线 l 的方程为 $y-t-\ln(t+1)=\left(1+\frac{1}{1+t}\right)(x-t)$，

令 $x=0$，则 $y=q=y=\ln(1+t)-\frac{t}{t+1}$.

$\because 2S_{\triangle ACO}=15S_{ABO}$，则 $2tf(t)=15t\left[\ln(1+t)-\frac{t}{t+1}\right]$，

$\therefore 13\ln(1+t)-2t-15\frac{t}{1+t}=0$，记 $h(t)=13\ln(1+t)-2t-\frac{15t}{1+t}(t>0)$，

$\therefore$ 满足条件的 A 有几个即 $h(t)$ 有几个零点.

$$h'(t)=\frac{13}{1+t}-2-\frac{15}{(t+1)^2}=\frac{13t+13-2\left(t^2+2t+1\right)-15}{(t+1)^2}=\frac{2t^2+9t-4}{(t+1)^2}=\frac{(-2t+1)(t-4)}{(t+1)^2},$$

当 $t\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 时，$h'(t)<0$，此时 $h(t)$ 单调递减；

当 $t\in\left(\frac{1}{2},4\right)$ 时，$h'(t)>0$，此时 $h(t)$ 单调递增；

当 $t\in(4,+\infty)$ 时，$h'(t)<0$，此时 $h(t)$ 单调递减；

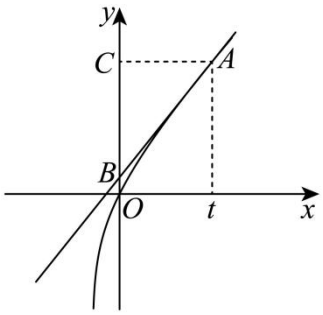
因为 $h(0)=0,h\left(\frac{1}{2}\right)\langle 0,h(4)=13\ln 5-20\rangle 13\times 1.6-20=0.8>0$，

$$h(24)=13\ln 25-48-\frac{15\times 24}{25}=26\ln 5-48-\frac{72}{5}<26\times 1.61-48-\frac{72}{5}=-20.54<0,$$

所以由零点存在性定理及 $h(t)$ 的单调性，$h(t)$ 在 $\left(\frac{1}{2},4\right)$ 上必有一个零点，在 $(4,24)$ 上必有一个零点，

综上所述，$h(t)$ 有两个零点，即满足 $2S_{ACO}=15S_{ABO}$ 的 A 有两个.

GK真题帮
真题如宝，高考无忧!
Real Questions, True success!



【点睛】

关键点点睛：本题第二问的关键是采用的是反证法，转化为研究函数零点问题.

21.（1）$\Omega(A):3,4,4,5,8,4,3,10$

（2）不存在符合条件的Ω，理由见解析

（3）证明见解析

【分析】（1）直接按照$\Omega(A)$的定义写出$\Omega(A)$即可；

（2）解法一：利用反证法，假设存在符合条件的Ω，由此列出方程组，进一步说明方程组无解即可；解法二：对于任意序列，所得数列之和比原数列之和多 4，可知序列Ω共有 8 项，可知：$(b_{2n-1}+b_{2n})-(a_{2n-1}+a_{2n})=8,n=1,2,3,4$，检验即可；

（3）解法一：分充分性和必要性两方面论证；解法二：若$a_1+a_2=a_3+a_4=a_5+a_6=a_7+a_8$，分类讨论$a_1,a_3,a_5,a_7$相等得个数，结合题意证明即可；若存在序列$\Omega$，使得$\Omega(A)$为常数列，结合定义分析证明即可.

【小问 1 详解】

因为数列$A:1,3,2,4,6,3,1,9$，

由序列$T_1(1,3,5,7)$可得$T_1(A):2,3,3,4,7,3,2,9$；

由序列$T_2(2,4,6,8)$可得$T_2T_1(A):2,4,3,5,7,4,2,10$；

由序列$T_3(1,3,5,7)$可得$T_3T_2T_1(A):3,4,4,5,8,4,3,10$；

所以$\Omega(A):3,4,4,5,8,4,3,10$.

【小问 2 详解】

解法一：假设存在符合条件的Ω，可知$\Omega(A)$的第$1,2$项之和为a_1+a_2+s，第$3,4$项之和为a_3+a_4+s，

GK真题帮
真题如宝，高考无忧!
Real Questions, True success!

则$\begin{cases}(a_1+2)+(a_2+6)=a_1+a_2+s\\(a_3+4)+(a_4+2)=a_3+a_4+s\end{cases}$，而该方程组无解，故假设不成立，

故不存在符合条件的Ω；

解法二：由题意可知：对于任意序列，所得数列之和比原数列之和多 4，

假设存在符合条件的Ω，且$\Omega(A):b_1,b_2,\cdots,b_8$，

因为$\frac{2+6+4+2+8+2+4+4}{4}=8$，即序列$\Omega$共有 8 项，

由题意可知：$(b_{2n-1}+b_{2n})-(a_{2n-1}+a_{2n})=8,n=1,2,3,4$，

检验可知：当$n=2,3$时，上式不成立，

即假设不成立，所以不存在符合条件的Ω.

【小问 3 详解】

解法一：我们设序列$T_s...T_2T_1(A)$为$\{a_{s,n}\}(1\le n\le 8)$，特别规定$a_{0,n}=a_n(1\le n\le 8)$.

必要性：

若存在序列$\Omega:T_1,T_2,\cdots T_s$，使得$\Omega(A)$的各项都相等.

则$a_{s,1}=a_{s,2}=a_{s,3}=a_{s,4}=a_{s,5}=a_{s,6}=a_{s,7}=a_{s,8}$，所以

$a_{s,1}+a_{s,2}=a_{s,3}+a_{s,4}=a_{s,5}+a_{s,6}=a_{s,7}+a_{s,8}$.

根据$T_s...T_2T_1(A)$的定义，显然有$a_{s,2j-1}+a_{s,2j}=a_{s-1,2j-1}+a_{s-1,2j}+1$，这里$j=1,2,3,4$，

$s=1,2,\ldots$.

所以不断使用该式就得到$a_1+a_2=a_3+a_4=a_5+a_6=a_7+a_8=a_{s,1}+a_{s,2}-s$，必要性得证.

充分性：

若$a_1+a_2=a_3+a_4=a_5+a_6=a_7+a_8$.

由已知，$a_1+a_3+a_5+a_7$为偶数，而$a_1+a_2=a_3+a_4=a_5+a_6=a_7+a_8$，所以

$a_2+a_4+a_6+a_8=4(a_1+a_2)-(a_1+a_3+a_5+a_7)$也是偶数.

我们设$T_s...T_2T_1(A)$是通过合法的序列Ω的变换能得到的所有可能的数列$\Omega(A)$中，使得

$|a_{s,1}-a_{s,2}|+|a_{s,3}-a_{s,4}|+|a_{s,5}-a_{s,6}|+|a_{s,7}-a_{s,8}|$最小的一个.

GK真题帮
真题如宝，高考无忧!
Real Questions, True success!

上面已经说明 $a_{s,2j-1}+a_{s,2j}=a_{s-1,2j-1}+a_{s-1,2j}+1$，这里 $j=1,2,3,4$， $s=1,2,\ldots.$

从而由 $a_1+a_2=a_3+a_4=a_5+a_6=a_7+a_8$ 可得

$a_{s,1}+a_{s,2}=a_{s,3}+a_{s,4}=a_{s,5}+a_{s,6}=a_{s,7}+a_{s,8}=a_1+a_2+s$.

同时，由于 $i_t+j_t+k_t+w_t$ 总是偶数，所以 $a_{t,1}+a_{t,3}+a_{t,5}+a_{t,7}$ 和 $a_{t,2}+a_{t,4}+a_{t,6}+a_{t,8}$ 的奇偶性保持不变，从而 $a_{s,1}+a_{s,3}+a_{s,5}+a_{s,7}$ 和 $a_{s,2}+a_{s,4}+a_{s,6}+a_{s,8}$ 都是偶数.

下面证明不存在 $j=1,2,3,4$ 使得 $\left|a_{s,2j-1}-a_{s,2j}\right|\geq 2$.

假设存在，根据对称性，不妨设 $j=1$， $a_{s,2j-1}-a_{s,2j}\geq 2$，即 $a_{s,1}-a_{s,2}\geq 2$.

情况 1：若 $\left|a_{s,3}-a_{s,4}\right|+\left|a_{s,5}-a_{s,6}\right|+\left|a_{s,7}-a_{s,8}\right|=0$，则由 $a_{s,1}+a_{s,3}+a_{s,5}+a_{s,7}$ 和 $a_{s,2}+a_{s,4}+a_{s,6}+a_{s,8}$ 都是偶数，知 $a_{s,1}-a_{s,2}\geq 4$.

对该数列连续作四次变换 $(2,3,5,8),(2,4,6,8),(2,3,6,7),(2,4,5,7)$ 后，新的 $\left|a_{s+4,1}-a_{s+4,2}\right|+\left|a_{s+4,3}-a_{s+4,4}\right|+\left|a_{s+4,5}-a_{s+4,6}\right|+\left|a_{s+4,7}-a_{s+4,8}\right|$ 相比原来的 $\left|a_{s,1}-a_{s,2}\right|+\left|a_{s,3}-a_{s,4}\right|+\left|a_{s,5}-a_{s,6}\right|+\left|a_{s,7}-a_{s,8}\right|$ 减少 4，这与 $\left|a_{s,1}-a_{s,2}\right|+\left|a_{s,3}-a_{s,4}\right|+\left|a_{s,5}-a_{s,6}\right|+\left|a_{s,7}-a_{s,8}\right|$ 的最小性矛盾；

情况 2：若 $\left|a_{s,3}-a_{s,4}\right|+\left|a_{s,5}-a_{s,6}\right|+\left|a_{s,7}-a_{s,8}\right|>0$，不妨设 $\left|a_{s,3}-a_{s,4}\right|>0$.

情况 2-1：如果 $a_{s,3}-a_{s,4}\geq 1$，则对该数列连续作两次变换 $(2,4,5,7),(2,4,6,8)$ 后，新的 $\left|a_{s+2,1}-a_{s+2,2}\right|+\left|a_{s+2,3}-a_{s+2,4}\right|+\left|a_{s+2,5}-a_{s+2,6}\right|+\left|a_{s+2,7}-a_{s+2,8}\right|$ 相比原来的 $\left|a_{s,1}-a_{s,2}\right|+\left|a_{s,3}-a_{s,4}\right|+\left|a_{s,5}-a_{s,6}\right|+\left|a_{s,7}-a_{s,8}\right|$ 至少减少 2，这与 $\left|a_{s,1}-a_{s,2}\right|+\left|a_{s,3}-a_{s,4}\right|+\left|a_{s,5}-a_{s,6}\right|+\left|a_{s,7}-a_{s,8}\right|$ 的最小性矛盾；

情况 2-2：如果 $a_{s,4}-a_{s,3}\geq 1$，则对该数列连续作两次变换 $(2,3,5,8),(2,3,6,7)$ 后，新的 $\left|a_{s+2,1}-a_{s+2,2}\right|+\left|a_{s+2,3}-a_{s+2,4}\right|+\left|a_{s+2,5}-a_{s+2,6}\right|+\left|a_{s+2,7}-a_{s+2,8}\right|$ 相比原来的 $\left|a_{s,1}-a_{s,2}\right|+\left|a_{s,3}-a_{s,4}\right|+\left|a_{s,5}-a_{s,6}\right|+\left|a_{s,7}-a_{s,8}\right|$ 至少减少 2，这与 $\left|a_{s,1}-a_{s,2}\right|+\left|a_{s,3}-a_{s,4}\right|+\left|a_{s,5}-a_{s,6}\right|+\left|a_{s,7}-a_{s,8}\right|$ 的最小性矛盾.

GK真题帮
真题如宝，高考无忧!
Real Questions, True success!

这就说明无论如何都会导致矛盾，所以对任意的 $j=1,2,3,4$ 都有 $\left|a_{s,2j-1}-a_{s,2j}\right|\le 1$.

假设存在 $j=1,2,3,4$ 使得 $\left|a_{s,2j-1}-a_{s,2j}\right|=1$，则 $a_{s,2j-1}+a_{s,2j}$ 是奇数，所以

$a_{s,1}+a_{s,2}=a_{s,3}+a_{s,4}=a_{s,5}+a_{s,6}=a_{s,7}+a_{s,8}$ 都是奇数，设为 $2N+1$.

则此时对任意 $j=1,2,3,4$，由 $\left|a_{s,2j-1}-a_{s,2j}\right|\le 1$ 可知必有 $\left\{a_{s,2j-1},a_{s,2j}\right\}=\left\{N,N+1\right\}$.

而 $a_{s,1}+a_{s,3}+a_{s,5}+a_{s,7}$ 和 $a_{s,2}+a_{s,4}+a_{s,6}+a_{s,8}$ 都是偶数，故集合 $\left\{m\middle|a_{s,m}=N\right\}$ 中的四个元素 i,j,k,w 之和为偶数，对该数列进行一次变换 (i,j,k,w)，则该数列成为常数列，新的 $\left|a_{s+1,1}-a_{s+1,2}\right|+\left|a_{s+1,3}-a_{s+1,4}\right|+\left|a_{s+1,5}-a_{s+1,6}\right|+\left|a_{s+1,7}-a_{s+1,8}\right|$ 等于零，比原来的 $\left|a_{s,1}-a_{s,2}\right|+\left|a_{s,3}-a_{s,4}\right|+\left|a_{s,5}-a_{s,6}\right|+\left|a_{s,7}-a_{s,8}\right|$ 更小，这与 $\left|a_{s,1}-a_{s,2}\right|+\left|a_{s,3}-a_{s,4}\right|+\left|a_{s,5}-a_{s,6}\right|+\left|a_{s,7}-a_{s,8}\right|$ 的最小性矛盾.

综上，只可能 $\left|a_{s,2j-1}-a_{s,2j}\right|=0\left(j=1,2,3,4\right)$，而 $a_{s,1}+a_{s,2}=a_{s,3}+a_{s,4}=a_{s,5}+a_{s,6}=a_{s,7}+a_{s,8}$，故 $\left\{a_{s,n}\right\}=\Omega\left(A\right)$ 是常数列，充分性得证.

解法二：由题意可知：Ω 中序列的顺序不影响 $\Omega\left(A\right)$ 的结果，

且 $\left(a_1,a_2\right),\left(a_3,a_4\right),\left(a_5,a_6\right),\left(a_7,a_8\right)$ 相对于序列也是无序的，

（ⅰ）若 $a_1+a_2=a_3+a_4=a_5+a_6=a_7+a_8$，

不妨设 $a_1\le a_3\le a_5\le a_7$，则 $a_2\ge a_4\ge a_6\ge a_8$，

①当 $a_1=a_3=a_5=a_7$，则 $a_8=a_6=a_4=a_2$，

分别执行 a_1 个序列 $(2,4,6,8)$、a_2 个序列 $(1,3,5,7)$，

可得 $a_1+a_2,a_1+a_2,a_1+a_2,a_1+a_2,a_1+a_2,a_1+a_2,a_1+a_2,a_1+a_2$，为常数列，符合题意；

②当 a_1,a_3,a_5,a_7 中有且仅有三个数相等，不妨设 $a_1=a_3=a_5$，则 $a_2=a_4=a_6$，

即 $a_1,a_2,a_1,a_2,a_1,a_2,a_7,a_8$，

分别执行 a_2 个序列 $(1,3,5,7)$、a_7 个序列 $(2,4,6,8)$

可得 $a_1+a_2,a_2+a_7,a_1+a_2,a_2+a_7,a_1+a_2,a_2+a_7,a_2+a_7,a_7+a_8$，

GK真题帮
真题如宝，高考无忧!
Real Questions, True success!

即 $a_1+a_2,a_2+a_7,a_1+a_2,a_2+a_7,a_1+a_2,a_2+a_7,a_2+a_7,a_1+a_2$ ，

因为 $a_1+a_3+a_5+a_7$ 为偶数，即 $3a_1+a_7$ 为偶数，

可知 a_1,a_7 的奇偶性相同，则 $\frac{a_7-a_1}{2}\in\mathbf{N}^*$ ，

分别执行 $\frac{a_7-a_1}{2}$ 个序列 $(1,3,5,7)$ ， $(1,3,6,8)$ ， $(2,3,5,8)$ ， $(1,4,5,8)$ ，

可得

$\frac{3a_7+2a_2-a_1}{2},\frac{3a_7+2a_2-a_1}{2},\frac{3a_7+2a_2-a_1}{2},\frac{3a_7+2a_2-a_1}{2},\frac{3a_7+2a_2-a_1}{2},\frac{3a_7+2a_2-a_1}{2},\frac{3a_7+2a_2-a_1}{2},\frac{3}{}$

，

为常数列，符合题意；

③若 $a_1=a_3<a_5=a_7$ ，则 $a_2=a_4>a_6=a_8$ ，即 $a_1,a_2,a_1,a_2,a_5,a_6,a_5,a_6$ ，

分别执行 a_5 个 $(1,3,6,8)$ 、 a_1 个 $(2,4,5,7)$ ，

可得 $a_1+a_5,a_1+a_2,a_1+a_5,a_1+a_2,a_1+a_5,a_5+a_6,a_1+a_5,a_5+a_6$ ，

因为 $a_1+a_2=a_5+a_6$ ，

可得 $a_1+a_5,a_1+a_2,a_1+a_5,a_1+a_2,a_1+a_5,a_1+a_2,a_1+a_5,a_1+a_2$ ，

即转为①，可知符合题意；

④当 a_1,a_3,a_5,a_7 中有且仅有两个数相等，不妨设 $a_1=a_3$ ，则 $a_2=a_4$ ，

即 $a_1,a_2,a_1,a_2,a_5,a_6,a_7,a_8$ ，

分别执行 a_1 个 $(2,4,5,7)$ 、 a_5 个 $(1,3,6,8)$ ，

可得 $a_1+a_5,a_1+a_2,a_1+a_5,a_1+a_2,a_1+a_5,a_5+a_6,a_1+a_7,a_5+a_8$ ，

且 $a_1+a_2=a_5+a_6$ ，可得 $a_1+a_5,a_1+a_2,a_1+a_5,a_1+a_2,a_1+a_5,a_1+a_2,a_1+a_7,a_5+a_8$ ，

即转为②，可知符合题意；

⑤若 $a_1<a_3<a_5<a_7$ ，则 $a_2>a_4>a_6>a_8$ ，即 $a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8$ ，

分别执行 a_1 个 $(2,3,5,8)$ 、 a_3 个 $(1,4,6,7)$ ，

可得 $a_1+a_3,a_1+a_2,a_1+a_3,a_3+a_4,a_1+a_5,a_3+a_6,a_3+a_7,a_1+a_8$ ，

GK真题帮
真题如宝，高考无忧!
Real Questions, True success!

且$a_1+a_2=a_3+a_4$，可得$a_1+a_3,a_1+a_2,a_1+a_3,a_1+a_2,a_1+a_5,a_3+a_6,a_3+a_7,a_1+a_8$，

即转为③，可知符合题意；

综上所述：若$a_1+a_2=a_3+a_4=a_5+a_6=a_7+a_8$，则存在序列$\Omega$，使得$\Omega(A)$为常数列；

（ii）若存在序列Ω，使得$\Omega(A)$为常数列，

因为对任意$\Omega(A):b_1,b_2,\cdots,b_8$，

均有

$(b_1+b_2)-(a_1+a_2)=(b_3+b_4)-(a_3+a_4)=(b_5+b_6)-(a_5+a_6)=(b_7+b_8)-(a_7+a_8)$成立，

若$\Omega(A)$为常数列，则$b_1+b_2=b_3+b_4=b_5+b_6=b_7+b_8$，

所以$a_1+a_2=a_3+a_4=a_5+a_6=a_7+a_8$；

综上所述：“存在序列Ω，使得$\Omega(A)$为常数列”的充要条件为

“$a_1+a_2=a_3+a_4=a_5+a_6=a_7+a_8$

GK真题帮
真题如宝，高考无忧！
Real Questions, True success!