2024年北京高考数学真题

一、单选题

1. 已知集合 $M=\{x\mid -4<x\le 1\}$，$N=\{x\mid -1<x<3\}$，则 $M\cup N=$（　　）

A. $\{x\mid -4<x<3\}$　　B. $\{x\mid -1<x\le 1\}$

C. $\{0,1,2\}$　　D. $\{x\mid -1<x<4\}$

2. 已知 $\frac{z}{\mathrm{i}}=\mathrm{i}-1$，则 $z=$（　　）.

A. $1-\mathrm{i}$　　B. $-\mathrm{i}$　　C. $-1-\mathrm{i}$　　D. 1

3. 求圆 $x^2+y^2-2x+6y=0$ 的圆心到 $x-y+2=0$ 的距离（　　）

A. $2\sqrt{3}$　　B. 2　　C. $3\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{6}$

4. $\left(x-\sqrt{x}\right)^4$ 的二项展开式中 x^3 的系数为（　　）

A. 15　　B. 6　　C. -4　　D. -13

5. 已知向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，则“$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=0$”是“$\vec{a}=\vec{b}$ 或 $\vec{a}=-\vec{b}$”的（　　）条件.

A. 必要而不充分条件　　B. 充分而不必要条件

C. 充分且必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

6. 已知 $f(x)=\sin\omega x(\omega>0)$，$f(x_1)=-1$，$f(x_2)=1$，$|x_1-x_2|_{\min}=\frac{\pi}{2}$，则 $\omega=$（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

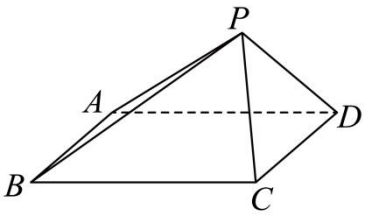
7. 生物丰富度指数 $d=\frac{S-1}{\ln N}$ 是河流水质的一个评价指标，其中 S,N 分别表示河流中的生物种类数与生物个体总数.生物丰富度指数 d 越大，水质越好．如果某河流治理前后的生物种类数 S 没有变化，生物个体总数由 N_1 变为 N_2，生物丰富度指数由 2.1 提高到 3.15，则（　　）

A. $3N_2=2N_1$　　B. $2N_2=3N_1$

C. $N_2^2=N_1^3$　　D. $N_2^3=N_1^2$

GK真题帮
真题如宝，高考无忧!
Real Questions, True success!

8. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 4 的正方形，$PA=PB=4$，$PC=PD=2\sqrt{2}$，该棱锥的高为（　　）.



A. 1　　B. 2　　C. $\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{3}$

9. 已知(x_1,y_1)，(x_2,y_2)是函数 $y=2^x$ 图象上不同的两点，则下列正确的是（　　）

A. $\log_2\frac{y_1+y_2}{2}>\frac{x_1+x_2}{2}$　　B. $\log_2\frac{y_1+y_2}{2}<\frac{x_1+x_2}{2}$

C. $\log_2\frac{y_1+y_2}{2}>x_1+x_2$　　D. $\log_2\frac{y_1+y_2}{2}<x_1+x_2$

10. 已知 $M=\left\{(x,y)\,|\,y=x+t\left(x^2-x\right),1\le x\le 2,0\le t\le 1\right\}$ 是平面直角坐标系中的点集.设 d 是 M 中两点间距离的最大值，S 是 M 表示的图形的面积，则（　　）

A. $d=3$，$S<1$　　B. $d=3$，$S>1$

C. $d=\sqrt{10}$，$S<1$　　D. $d=\sqrt{10}$，$S>1$

二、填空题

11. 已知抛物线 $y^2=16x$，则焦点坐标为_____.

12. 已知$\alpha\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$，且α与β的终边关于原点对称，则 $\cos\beta$ 的最大值为_____.

13. 若直线 $y=k(x-3)$ 与双曲线 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 只有一个公共点，则 k 的一个取值为 _____..

14. 汉代刘歆设计的“铜嘉量”是斛、合、升、斗、斛五量合一的标准量器，其中升量器、斗量器、斛量器的形状均可视为圆柱.若升、斗、斛量器的容积成公比为 10 的等比数列，底面直径依次为 65mm,325mm,325mm，且斛量器的高为 230mm，则斗量器的高为_____mm，升量器的高为_____mm.

15. 设$\{a_n\}$与$\{b_n\}$是两个不同的无穷数列，且都不是常数列.记集合 $M=\left\{k\,|\,a_k=b_k,k\in\mathrm{N}^*\right\}$，给出下列 4

GK真题帮
真题如宝，高考无忧!
Real Questions, True success!

个结论：

①若$\{a_n\}$与$\{b_n\}$均为等差数列，则M中最多有1个元素；

②若$\{a_n\}$与$\{b_n\}$均为等比数列，则M中最多有2个元素；

③若$\{a_n\}$为等差数列，$\{b_n\}$为等比数列，则M中最多有3个元素；

④若$\{a_n\}$为递增数列，$\{b_n\}$为递减数列，则M中最多有1个元素.

其中正确结论的序号是_____.

三、解答题

16. 在△ABC中，$a=7$，A为钝角，$\sin 2B=\frac{\sqrt{3}}{7}b\cos B$.

（1）求$\angle A$；

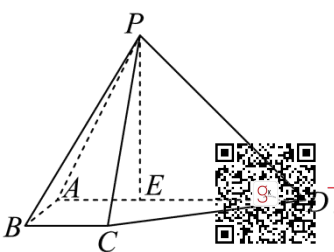
（2）从条件①、条件②和条件③这三个条件中选择一个作为已知，求△ABC的面积.

①$b=7$；②$\cos B=\frac{13}{14}$；③$c\sin A=\frac{5}{2}\sqrt{3}$.

注：如果选择条件①、条件②和条件③分别解答，按第一个解答计分.

17. 已知四棱锥P-$ABCD$，$AD//BC$，$AB=BC=1$，$AD=3$，$DE=PE=2$，E是AD上一点，$PE\perp AD$.

（1）若F是PE中点，证明：BF//平面PCD.



GK真题帮
真题如宝，高考无忧!
Real Questions, True success!

（2）若 $AB\perp$ 平面 PED，求平面 PAB 与平面 PCD 夹角的余弦值.

18. 某保险公司为了了解该公司某种保险产品的索赔情况，从合同险期限届满的保单中随机抽取 1000 份，记录并整理这些保单的索赔情况，获得数据如下表：

赔偿次数	0	1	2	3	4
单数	800	100	60	30	10

假设：一份保单的保费为 0.4 万元；前 3 次索赔时，保险公司每次赔偿 0.8 万元；第四次索赔时，保险公司赔偿 0.6 万元.假设不同保单的索赔次数相互独立.用频率估计概率.

（1）估计一份保单索赔次数不少于 2 的概率；

（2）一份保单的毛利润定义为这份保单的保费与赔偿总金额之差.

（i）记 X 为一份保单的毛利润，估计 X 的数学期望 $E(X)$；

（ii）如果无索赔的保单的保费减少 4%，有索赔的保单的保费增加 20%，试比较这种情况下一份保单毛利润的数学期望估计值与（i）中 $E(X)$ 估计值的大小.（结论不要求证明）

GK真题帮
真题如宝，高考无忧!
Real Questions, True success!

19. 已知椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，以椭圆 E 的焦点和短轴端点为顶点的四边形是边长为 2 的正方形.过点 $(0,t)(t>\sqrt{2})$ 且斜率存在的直线与椭圆 E 交于不同的两点 A,B，过点 A 和 $C(0,1)$ 的直线 AC 与椭圆 E 的另一个交点为 D.

（1）求椭圆 E 的方程及离心率；

（2）若直线 BD 的斜率为 0，求 t 的值..

20. 设函数 $f(x)=x+k\ln(1+x)(k\neq 0)$，直线 l 是曲线 $y=f(x)$ 在点 $(t,f(t))(t>0)$ 处的切线.

（1）当 $k=-1$ 时，求 $f(x)$ 的单调区间.

（2）求证：l 不经过点 $(0,0)$.

（3）当 $k=1$ 时，设点 $A(t,f(t))(t>0)$，$C(0,f(t))$，$O(0,0)$，B 为 l 与 y 轴的交点，$S_{\triangle ACO}$ 与 $S_{\triangle ABO}$ 分别表示 $\triangle ACO$ 与 $\triangle ABO$ 的面积. 是否存在点 A 使得 $2S_{\triangle ACO}=15S_{\triangle ABO}$ 成立？若存在，这样的点 A 有几个？

（参考数据：$1.09<\ln 3<1.10$，$1.60<\ln 5<1.61$，$1.94<\ln 7<1.95$）

GK真题帮
真题如宝，高考无忧!
Real Questions, True success!

21. 已知集合 $M=\left\{(i,j,k,w)\middle| i\in\{1,2\},j\in\{3,4\},k\in\{5,6\},w\in\{7,8\},\text{且}i+j+k+w\text{为偶数}\right\}$．给定数列 $A:a_1,a_2,\cdots,a_8$，和序列 $\Omega:T_1,T_2,\cdots T_s$，其中 $T_t=(i_t,j_t,k_t,w_t)\in M\ (t=1,2,\cdots,s)$，对数列 A 进行如下变换：将 A 的第 i_1,j_1,k_1,w_1 项均加 1，其余项不变，得到的数列记作 $T_1(A)$；将 $T_1(A)$ 的第 i_2,j_2,k_2,w_2 项均加 1，其余项不变，得到数列记作 $T_2T_1(A)$；……；以此类推，得到 $T_s\cdots T_2T_1(A)$，简记为 $\Omega(A)$．

（1）给定数列 $A:1,3,2,4,6,3,1,9$ 和序列 $\Omega:(1,3,5,7),(2,4,6,8),(1,3,5,7)$，写出 $\Omega(A)$；

（2）是否存在序列 Ω，使得 $\Omega(A)$ 为 $a_1+2,a_2+6,a_3+4,a_4+2,a_5+8,a_6+2,a_7+4,a_8+4$，若存在，写出一个符合条件的 Ω；若不存在，请说明理由；

（3）若数列 A 的各项均为正整数，且 $a_1+a_3+a_5+a_7$ 为偶数，求证：“存在序列 Ω，使得 $\Omega(A)$ 的各项都相等”的充要条件为“$a_1+a_2=a_3+a_4=a_5+a_6=a_7+a_8$”．

GK真题帮
真题如宝，高考无忧!
Real Questions, True success!